Johanna HEITZER, Aachen

# Vom Lotfällen bis zum JPEG-Format –<br>Eine zentrale mathematische Idee und ihre Anwendungen

## Motivation und Zielsetzung

Angesichts der teilweise extremen Trendwenden der Mathematikdidaktik verglich der amerikanische Mathematiker Richard Askey die Mathematik mit einem Hocker, der auf drei Beinen ruhe: Problemen, Technik und Struktur. Jeder Unterrichtsansatz, der einen oder gar zwei dieser Aspekte außer Acht lasse, sei zum Scheitern verurteilt.

Zur Zeit liegt – jedenfalls in Nordrhein-Westfalen – der Akzent recht einseitig auf den Problemen und Anwendungen. Das ist in zweierlei Hinsicht problematisch: Erstens ist Askey folgend zu bezweifeln, dass durch die Behandlung einer geeigneten Auswahl von Problemen Technik und Struktur automatisch in ausreichendem Maße mit vermittelt werden. Zweitens sind gehaltvolle und authentische, intellektuell ehrlich auf Schulniveau zu behandelnde Probleme so rar, dass die Anwendungsorientierung bisweilen zur – teilweise hoch konstruierten – Einkleiderei verkommt.

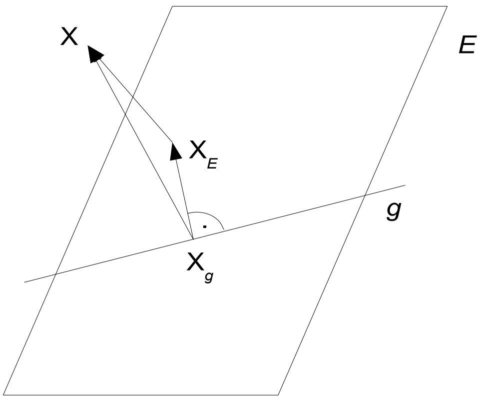
Die Haupt-Intentionen dieser Arbeit sind demgegenüber: erfolgreiche angewandte Mathematik der letzten Jahrzehnte für den Schulunterricht zugänglich zu machen; den Blick auf die Struktur zu lenken und zu zeigen, dass das für Erkenntnis und Anwendungen von Nutzen sein kann; zentrale mathematische Ideen zu vermitteln, die die Grenzen der üblichen Teilgebiete überschreiten.

Gedacht ist dabei vor allem an Aus- und Überblicke in der Oberstufe. Einzelne Aspekte und Lerntools sind jedoch auch in der Mittelstufe umsetzbar. Über Kernidee und Beispiele wird hier ein kurzer Überblick gegeben.

## Fachlicher Kern

Ausgangspunkt sind die Erfahrungen der Schüler im dreidimensionalen Euklidischen Raum: Das Standardskalarprodukt zweier Vektoren ist genau dann Null, wenn die Vektoren orthogonal zueinander sind (Trigonometrie), und liefert zudem die Länge von Vektoren (Pythagoras).

Relativ leicht und von der Anschauung getragen ergeben sich zwei Einsichten, die zu einem universellen Verfahren ausgebaut werden können: Von allen Verbindungsvektoren einer Ebene $E$ mit einem Punkt $X$ ist der auf $E$ senkrecht stehende am kürzesten. Der kürzeste Verbindungsvektor von $E$ mit $X$ unterscheidet sich vom kürzesten Verbindungsvektor einer Gerade $g \subset E$ mit $X$ nur durch einen senkrechten Anteil.




Zum Beweis dieser Aussagen benötigt man nur die Symmetrie und Bilinearität des Skalarprodukts. Erklärt man diese zusammen mit der positiven Definitheit zu definierenden Eigenschaften von Skalarprodukten und versteht Orthogonalität und Länge im über das Skalarprodukt festgelegten Sinne, so sind die Aussagen weit über den anschaulichen Bereich hinaus abstrahierbar:

Die Orthogonalprojektion eines Vektors auf einen Unterraum ist seine beste Approximation im Sinne der zugehörigen Norm. Die besten Approximationen eines Vektors in verschachtelten Unterräumen aufsteigender Dimension unterscheiden sich voneinander nur durch orthogonale Anteile.

Die zweite Aussage sichert die Ausbaubarkeit zu folgendem allgemeinen Verfahren; denn nach ihr bleiben bei sukzessiver Dimensionserhöhung des Unterraums alle bereits berechneten Koeffizienten unverändert.

<u>Bestimmung bester Approximationen durch Entwicklung über Orthonormalbasen:</u> Fasse das zu approximierende Signal als Element eines Vektorraums mit Skalarprodukt auf. Wähle als Approximationsbereich einen geeigneten Unterraum. Bestimme (durch geschickte Wahl oder Schmidtsches Verfahren) eine Orthonormalbasis des Unterraums. Entwickle das Signal über der Orthonormalbasis. Erhöhe die Dimension sukzessive bis zur gewünschten Genauigkeit. Lasse weitere für den Anwendungskontext unwichtige Komponenten weg (z.B. mit betragsmäßig kleinen Koeffizienten).

Nun ist die Bestimmung guter Approximationen angesichts der heutigen Datenmengen, die gespeichert, übermittelt und interpretiert werden sollen, ein Problem von nicht zu überschätzender Bedeutung. Da Signale aller Art letztlich zeit- oder ortsabhängige Funktionen sind, ist insbesondere die Erweiterung des Verfahrens auf Funktionenräume von enormer Tragweite. Somit bleibt die Abstraktion der aus der Anschauung motivierten Ideen kein Selbstzweck, sondern führt zu neuen relevanten Anwendungen.

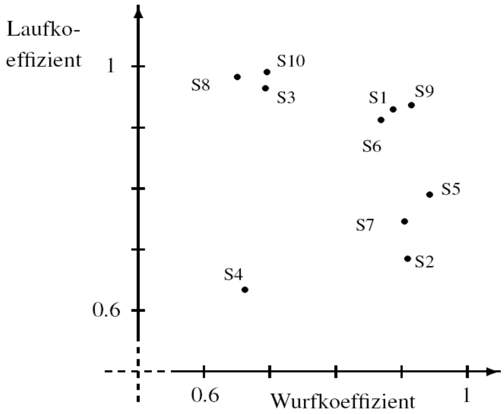
**Beispiele**

Die im $IR^3$ gewonnenen Erkenntnisse werden zunächst auf Beispiele mit Spaltenvektoren in höheren endlichen Dimensionen übertragen. Dann folgt der Übergang zu Funktionenräumen mit dort üblichen Skalarprodukten. Hierzu werden zwei der wichtigsten Anwendungen vorgestellt: Die Bearbeitung akustische Signale mit den Sinus- und Cosinus-Funktionen als Basis aller periodischen Funktionen und die Bild-Verarbeitung mit den Haar-Wavelets als Basis aller stückweise konstanten Funktionen.

Beispiele im $IR^n$ mit n>3

In Frage kommen alle Anwendungen, bei denen das zu minimierende Maß über die Summe der Komponentenquadrate definiert ist. Dazu zählen die Schwerpunktsbestimmung von Punktmengen, die Anpassung ganzrationaler Funktionen an Messreihen, Raum-Zeit-Probleme und die Dimensionsreduktion von Datenlisten als Bestandteil der so genannten Clusteranalyse.

Letztere dient der Untersuchung großer Objektmengen auf das Auftreten von Klassen mit bestimmten Merkmalsausprägungen. Sind zum Beispiel die Bestleistungen von Leichtathleten in verschiedenen Disziplinen als n-dimensionale Vektoren gegeben, so kann die Projektion auf einen zweidimensionalen Unterraum Übersicht verschaffen, wenn dieser durch an den Weltrekorden orientierte Prototypen eines 'reinen Werfers' und eines 'reinen Läufers' aufgespannt wird. Die umfangreichen Sportlerdaten werden durch die beiden Koeffizienten der besten Approximation in diesem Unterraum ersetzt, welche über Punkte in der Ebene veranschaulicht werden können und Diagnosen zum Beispiel hinsichtlich der weiteren Spezialisierung erleichtern.



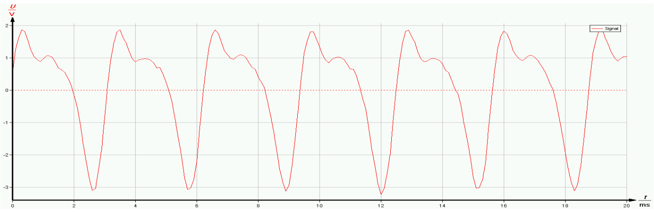

Funktionenräume

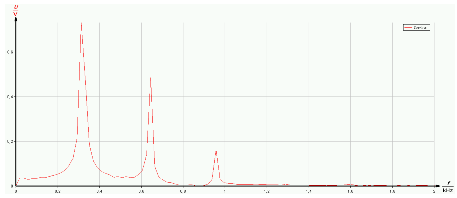
Spaltenvektoren können auch als Wertelisten stückweise konstanter Funktionen (über gleich breiten, z.B. dyadischen Intervallen) aufgefasst werden. Eine immer größere Zahl immer kleinerer Intervalle führt im Grenzübergang auf den Vektorraum der Funktionen $f{:}[0,1]\rightarrow IR$ . Das Standardskalarprodukt geht dabei in das Integral $\langle f,g\rangle=\int f(x)\cdot g(x)\,dx$ über. Dabei bleiben die wesentlichen Eigenschaften erhalten, wenn man sich auf stückweise stetige Funktionen beschränkt und Funktionen identifiziert, die sich nur an endlich vielen Stellen unterscheiden. Der zugehörige Orthogonalitäts- und Normbegriff sind zunächst wenig anschaulich. Durch eine geeignete Auswahl von Beispielen kann jedoch ein Gefühl dafür vermittelt werden, welche Funktionen große Norm haben und wann zwei Funktionen als orthogonal zueinander bezeichnet werden.

Fourier-Basis aller periodischen Funktionen

Eine der erfolgreichsten Anwendungen des Verfahrens in Funktionenräumen ist die Fourieranalysis: Die Menge der Funktionen $\sqrt{2}\,\sin(2\pi nx)$ und $\sqrt{2}\,\cos(2\pi nx)$ ist eine Orthonormalbasis aller 1-periodischen Funktionen. Periodisch sind zum Beispiel einfache akustische Signale, wie sie den

Klängen verschiedener Instrumente oder den Vokallauten entsprechen. Mit geeigneten physikalischen Mitteln und Computer-Algebra-Systemen erschließt sich Schülern ein breites Feld der eigenständigen Erkundungen rund um die Analyse und Synthese von Geräuschen, bei der Effektivität und Qualität verschiedener Approximationen untersucht werden können.

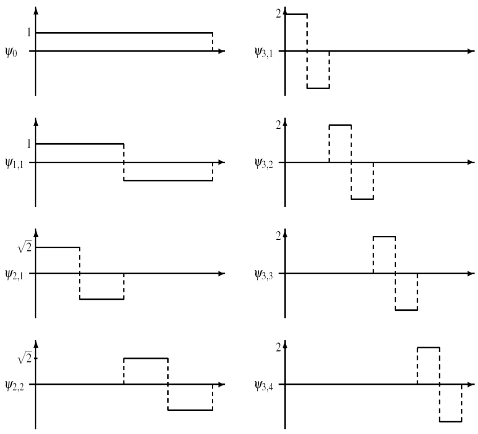


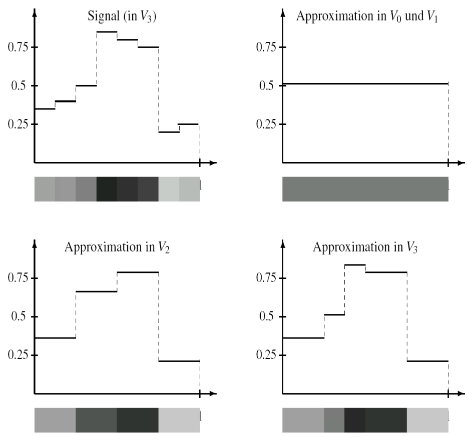


Die Abbildungen zeigen den zeitlichen Verlauf sowie das Frequenzspektrum des aufgenommenen Vokals O. Eine brauchbare Approximation liefert die Funktion $f(x)=1.73\cdot\sin(2x)+1.15\cdot\sin(4x+1.26)+0.36\cdot\sin(6x+2.20)$ .

Haar-Wavelet-Basis aller stückweise konstanten Funktionen

Eine nicht minder erfolgreiche, bedeutend jüngere Anwendung des Verfahrens ist die Haar-Wavelet-Transformation als Teil der Bildkompression im JPEG-Format: Die linke Abbildung zeigt die Haar-Wavelets bis zum Grad drei (allgemein n). Sie bilden eine Orthonormalbasis aller auf acht (allgemein $2^n$) dyadischen Intervallen konstanten Funktionen.




Die Grundidee der Transformation besteht darin, sich statt benachbarter Pixelwerte deren Mittelwert und Differenz zu merken. Letztere ist nämlich bei den meisten Bildern in großen Bereichen so klein, dass ein Weglassen der entsprechenden Koeffizienten keinen nennenswerten Qualitätsverlust zur Folge hat. Die rechte Abbildung zeigt als Beispiel einen eindimensionalen Ausschnitt eines Schwarzweißbildes mit seinen Approximationen durch Haar-Wavelets vom Grad 0 bis 3. Man erkennt im letzten Bild eine gute Approximation des Signals mit nur der Hälfte der Koeffizienten: $f\approx 51.3\,\psi_0-10.6\,\psi_{2,1}+19.5\,\psi_{2,2}-2.5\,\psi_{3,2}$ . Mit Rechnungen von Hand beginnend können Schüler über die Nutzung von Computer-Algebra-Systemen bis zur Approximation selbst eingespeister Fotos vordringen.